VON DER

EMPFINDLICHKEIT DER BRÜCKENWAGEN

UND DER

EINFACHEN UND ZUSAMMENGESETZTEN

HEBEL-KETTEN-SYSTEME.

VON THEODOR SCHÖNEMANN,
MATHEMATICUS AM GYMNASIUM ZU BRANDENBURG A. H.

(Tafel IX — XIII.)

(VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM XIX. APRIL MDCCCLII.)

Einleitung.

Eine Brückenwage gewährt bekanntlich einen Belastungsraum, der, an einem bestimmten Punkte unterstützt, durch die Belastung nicht aus seiner Lage gebracht werden kann. Die Unterstützung selbst wird in der Regel mittelbar von einem Gewichte ausgeübt, welches der Belastung das Gleichgewicht hält. Ist der Belastungsraum von der Beschaffenheit, dass der Ort der Belastung auf das Gewicht, welches derselben das Gleichgewicht hält, keinen Einfluss übt, so nennt man die ganze Vorrichtung eine Brückenwage, und den Belastungsraum die Brücke derselben. Da im Falle des Gleichgewichtes die Summe der virtuellen Momente der Last und des Gewichtes gleich 0 ist, so müssen die virtuellen Momente der Last unabhängig von dem Orte der Belastung auf der Brücke sein. Es müssen demnach die virtuellen Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte der Brücke, bei einer unendlich kleinen Bewegung des Unterstützungspunktes und der Brücke selbst, aus ihrer Normal-Stellung, unter einander gleich sein. Damit dieses geschehe ist es nothwendig und hinreichend, dass drei Punkte der Brücke, die nicht in gerader Linie liegen, sich auf drei Curven bewegen, welche in dem der Normal-Stellung entsprechenden Falle, parallele Tangenten haben. Um diesen Zweck zu erreichen, sind bis jetzt eine Anzahl ziemlich verschiedener Constructionen in Anwendung gebracht worden. Da indessen aus dem blossen Begriffe einer Brückenwage sich verschiedene Eigenthümlichkeiten dieser Apparate ergeben, welche sich auf die Stellung und Empfindlichkeit derselben beziehen, die bis jetzt ausser Acht gelassen sind, obgleich sie einen verschiedenen Einfluss auf die Construction ausüben, so sollen dieselben in der folgenden Untersuchung im Allgemeinen und Speciellen so abgehandelt werden, dass hierdurch die wahre Grundlage für die Construction jeder Brückenwage gewonnen wird. Die Hebel-Ketten-Systeme treten für die Brückenwagen als nothwendige Zwischenglieder auf, daher sind sowohl die hier in Betracht zu ziehenden Eigenthümlichkeiten der einfachen Apparate dieser Gattung als auch der zusammengesetzten, ebenfalls dargelegt worden.

Um zum Schlusse noch von der praktischen Seite einen Einblick in den Gegenstand der folgenden Untersuchung zu gewähren, soll hier eines Versuches gedacht werden, welcher ziemlich unbekannt zu sein scheint. Man belaste nämlich die Brücke einer gewöhnlichen Strassburger Decimal-Brückenwage etwa mit 100, und die Schale mit 10 Pfunden, so werden sich diese Gewichte das Gleichgewicht halten. Legt man aber noch auf die Brücke eine Zulage von 6 Lothen, so wird man beobachten, dass die Grösse des Ausschlagwinkels wesentlich von der Stelle bedingt ist, welchen die Last auf der Brücke einnimmt. Ähnliche Erscheinungen können bei allen Arten von Brückenwagen eintreten, und die folgende Abhandlung hat vorzüglich die Aufgabe zu lösen, alle hier einschlagenden Elemente aufzustellen und in Rechnung zu bringen, so dass sich der Erfolg a priori feststellen lässt, wenn der Ausschlagwinkel eine sehr kleine Grösse ist.

§. 1.

Von der Empfindlichkeit eines Hebels, auf welchen zwei senkrechte Kräfte wirken.

Stellt abc Taf. IX, Fig. 1, eine gebrochene starre Linie und ht eine horizontale dar, setzt man ferner $ab = r$, $bc = \rho$, $\angle abh = \psi_1$, $\angle cbt = \varphi_1$, und nimmt an, der Punkt b wäre ein fester Drehungspunkt, und die Punkte a und c mit den Gewichten P und p belastet, so muss

$$\text{I) } rP \cos.\, \psi_1 = \rho\, p \cos.\, \varphi_1$$

sein, wenn sich beide Gewichte das Gleichgewicht halten sollen. Genügen nun die Grössen P und p dieser Gleichung, und man nimmt von dem Gewichte P einen kleinen Theil ΔP fort, so ist der W. $\Delta\varphi$ zu bestimmen, um welchen sich die starre Linie drehen müsse, um in ihre nächste Gleichgewichts-Lage zu kommen. Zur Bestimmung dieses Winkels hat man die Momenten-Gleichung

$$\text{II) } r(P - \Delta P) \cos.\, (\psi_1 - \Delta\varphi) = p\rho \cos.\, (\varphi_1 + \Delta\varphi),$$

aus welcher man leicht die folgende ableitet:

$$tg.\Delta\varphi \left\{ \frac{P}{\Delta P} - \frac{tg.\psi_1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1} \right\} = \frac{1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1}.$$

Man kann nun ΔP immer klein genug annehmen, dass $\frac{P}{\Delta P} - \frac{tg.\psi_1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1}$ eine positive Grösse wird, wenn $\varphi_1 + \psi_1$ nicht $= 0$ ist. Es wird mithin der Werth von $tg.\Delta\varphi$ positiv oder negativ sein, je nachdem $tg.\varphi_1 + tg.\psi_1$ es ist, oder wenn φ_1 und ψ_1 seinem absoluten Werthe nach kleiner als ein Rechter ist, so wird der Werth von $tg.\Delta\varphi$ von gleichem Vorzeichen mit $\varphi_1 + \psi_1$ sein. Wird nun der Werth von $tg.\Delta\varphi$ negativ, wie klein man auch ΔP annehmen mag, so muss $\Delta\varphi$ eine endliche Grösse, und grösser als ein rechter Winkel sein. Bekanntlich ist auch das Gleichgewicht, wenn $\varphi_1 + \psi_1 = 0$ oder negativ ist, entweder indifferent oder labil.

Ist aber $tg.\psi_1 + tg.\varphi_1 > 0$, so folgt, dass $tg.\Delta\varphi$ zugleich mit ΔP eine sehr kleine positive Grösse wird, und dass daher $\Delta\varphi$ selbst eine sehr kleine Grösse sein müsse. Unter dieser Voraussetzung kann man statt $tg.\Delta\varphi$, $\Delta\varphi$ selbst setzen, und es ergibt sich, dass, wenn ΔP eine unendlich kleine Grösse ist, $-\Delta\varphi \cdot \frac{P}{\Delta P} = \frac{1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1}$ sein müsse. Diesen Quotienten $-\Delta\varphi \cdot \frac{P}{\Delta P}$ werden wir die Empfindlichkeit des Hebels nennen. Die Empfindlichkeit des Hebels hängt also nur von den Winkeln φ_1 und ψ_1 ab, die beide Arme mit dem Horizonte bilden, nicht aber von der Länge dieser Arme, und ist für beide Arme dieselbe, nämlich: $\frac{1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1}$.

Man kann die Empfindlichkeit auch leicht aus der Gleichung I) $rP \cos.\, \psi_1 = \rho\, p \cos.\, \varphi_1$ ableiten, wenn man dieselbe nach P, ψ_1 und φ_1 differentiirt, und $d\psi_1 = -d\varphi_1 = -d\varphi$ setzt. Man erhält alsdann $-d\varphi \cdot \frac{P}{dP} = \frac{1}{tg.\varphi_1 + tg.\psi_1}$. Es kam aber darauf an, nachzuweisen, dass $\Delta\varphi$ einen endlichen Werth annehme, wenn $\varphi_1 + \psi_1 = 0$ oder negativ wird, was bei dem Resultate der Differentiation nicht klar hervortreten kann, da für diese Fälle die Stammgrösse von $\Delta\varphi$ discontinuirlich wird, und daher eigentlich den Begriff der Differentiation nicht zulässt. Aber zu bemerken ist, dass, wenn bei ähnlichen Fällen sich der Werth von $-d\varphi \cdot \frac{P}{dP}$ negativ findet, dies darauf hindeutet, dass $d\varphi$ eigentlich einen endlichen Werth annimmt, was sich einerseits leicht aus statischen Gründen nachweisen lässt, andrerseits analytisch hervorgeht, wenn man statt $d\varphi$, $tg.\ d\varphi$ einsetzt.

§. 2.

Von dem Gleichgewichte und der Empfindlichkeit zweier starren Linien, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, sich um zwei feste Punkte drehen können, und von denen jede in einem gewissen Punkte von einer constanten senkrechten Kraft ergriffen wird.

Vorausgesetzt, die beiden Linien (Fig. 2) seien R und ρ, welche mit dem Horizonte die Winkel φ und ψ bilden, und die durch die Kräfte P und p angegriffen werden, so erhält man nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung:

$$\text{I)}\quad PR\,cos.\,\psi d\psi + p\rho\,cos.\,\varphi d\varphi = 0.$$

Soll diese Gleichung unabhängig von der Stellung des Systems in Erfüllung gehen, so müssen die virtuellen Geschwindigkeiten von P und p parallel sein, weil alsdann ihre Projectionen auf eine Senkrechte stets in dem Verhältnisse wie sie selbst stehen. Differentiirt man die Gleichung I noch ein Mal nach P und φ, das andere Mal nach p und φ, so erhält man die folgenden Gleichungen, wenn man $d^2\varphi = 0$ setzt:

$$\text{II)}\quad \frac{dP}{Pd\varphi} - tg.\psi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi} + tg.\varphi + \frac{d^2\psi}{d\psi\,.\,d\varphi} = 0,$$

$$\text{III)}\quad \frac{dp}{p\,d\varphi} + tg.\psi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi} - tg.\varphi - \frac{d^2\psi}{d\psi\,.\,d\varphi} = 0,$$

aus welchen folgt, dass der Ausschlag, der bei einer sehr kleinen Zunahme des Gewichtes P erfolgt, gleich, aber entgegengesetzt von dem ist, der bei einer verhältnissmässigen Zunahme von p folgen würde. Setzen wir nun voraus, von der Lage von ρ hänge die Lage irgend einer starren Linie des Systems ab, an welcher sich die Zunge desselben befindet, welche sich um den Winkel $d\mu$ dreht, wenn sich ρ um den Winkel $d\varphi$ dreht, so hat man $-\frac{dP}{P\,.\,d\mu} = \frac{1}{E}$ zu setzen. E selbst soll wie oben die Empfindlichkeit heissen, und man erhält daher

$$\text{IV)}\quad \frac{1}{E} = \left\{ tg.\varphi - tg.\psi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d^2\psi}{d\psi\,.\,d\varphi} \right\} \frac{d\varphi}{d\mu}.$$

Es ist zu bemerken, dass $tg.\ \varphi$ und $tg.\ \psi$ von der Stellung des Systems, die andern Ausdrücke aber nur von der Verbindung desselben abhängen. Um nun diese Ausdrücke für die Theorie der Brückenwagen näher zu entwickeln, stellen wir zunächst folgende Aufgabe:

§. 3.

Die Differential-Verhältnisse der Winkel eines Vierseits mit vier unveränderlichen Seiten und unveränderlichen Winkeln zu entwickeln.

Bezeichnet $\mathfrak{abfp}$ Fig. 3 ein Vierseit, dessen Seiten $\mathfrak{ab} = C$, $\mathfrak{bf} = r$, $\mathfrak{fp} = D$, $\mathfrak{pa} = R$ unveränderlich sind, so sollen die Differential-Verhältnisse $\frac{d\psi}{d\varphi}$, $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, $\frac{d\beta}{d\varphi}$, $\frac{d\varkappa}{d\varphi}$, $\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$ und $\frac{d^2\varkappa}{d\varphi^2}$ entwickelt werden, wenn α, β, φ und ψ die Winkel je zweier aufeinander folgender Seiten des Vierseits sind, z den von C und D gebildeten Winkel bedeutet, und $d^2\varphi = 0$ gesetzt wird.

Geht die Linie $\mathfrak{ab}$ in die Lage $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ über, so bildet $\mathfrak{ab}$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ den Winkel dz. Die Projection von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ auf $\mathfrak{ab}$ ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\ cos.\ dz = C\ cos.\ dz$, und unterscheidet sich von C nur um eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung. Man kann daher die Projection von $\mathfrak{aa}_1$ auf $\mathfrak{ab}$ gleich der Projection von $\mathfrak{bb}_1$ auf dieselbe Linie setzen. Es ist aber $\mathfrak{bb}_1 = r d\varphi$ und die Projection dieser Grösse auf $\mathfrak{ab}$ ist: $r d\varphi\ cos.\ \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \pi\right) = r d\varphi\ sin.\ \beta$. Wenn φ um $d\varphi$ wächst, so nimmt offenbar ψ ab, oder wächst um $-d\psi$. Die Projection von $\mathfrak{aa}_1$ auf $\mathfrak{ab}$ ist $-R d\psi\ sin.\ \alpha$, und man erhält daher die Gleichung: $r\, d\varphi\ sin.\ \beta = -R d\psi\ sin.\ \alpha$ oder $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha}$.

Aus der Combination von φ mit ψ und β, und von α mit β erhält man auf gleiche Weise folgende drei Gleichungen:

$$1)\ \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha}\quad 2)\ \frac{d\beta}{d\varphi} = -\frac{D\ sin.\ \psi}{C\ sin.\ \alpha}\quad 3)\ \frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{r\ sin.\ \varphi}{R\ sin.\ \psi}$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung mit der zweiten, so erhält man:

$$4)\ \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{D r\ sin.\ \varphi}{C R\ sin.\ \alpha}$$

Offenbar ist $\beta + \varphi = \pi + z$, mithin $dz = d\beta + d\varphi$ und daher:

$$5)\ \frac{dz}{d\varphi} = 1 - \frac{D\ sin.\ \psi}{C\ sin.\ \alpha}$$

Differentiirt man die Formel 1) noch einmal, und setzt die für $\frac{d\beta}{d\varphi}$ und $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ gefundenen Werthe ein, so erhält man:

$$6)\ \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{r D}{R C\ sin.^2\alpha}\left[\ sin.\ \psi\ cos.\ \beta + \frac{r}{R}\ sin.\ \beta\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\ \right]$$

und durch Differentiation der Formel 5) erhält man:

$$7)\ \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \frac{r D}{R C\ sin.^2\alpha}\left[\ cos.\ \psi\ sin.\ \beta + \frac{D}{C}\ sin.\ \psi\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\ \right].$$

§. 4.

Stellt $\mathfrak{bfn}$, Fig. 4, eine gebrochene starre Linie, $\mathfrak{abfp}$ aber ein Parallel-Trapez dar, in welchem $\mathfrak{bf} \parallel \mathfrak{ap}$ ist, dessen Seiten von unveränderlicher Grösse, dessen Winkel aber veränderlich sind; setzt man ferner voraus, die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$ seien feste, und mit $\mathfrak{ab}$ sei eine Ebene fest verbunden, die durch $\mathfrak{bfn}$ geht, und o sei ein Punkt dieser Ebene, — ferner der Punkt o sei mit dem Gewichte P, der Punkt $\mathfrak{n}$ mit dem Gewichte p belastet, so ist 1) das Verhältniss von $p : P$ zu finden, damit sich diese beiden Gewichte das Gleichgewicht halten, und 2) die Empfindlichkeit des Systems oder $-d\varphi\ .\ \frac{P}{dP}$ zu ermitteln, wenn $d\varphi$ die Zunahme des Winkels $\mathfrak{bfp}$ bedeutet, welche der Abnahme des Gewichtes P um dP entspricht.

Damit die Gewichte p und P sich das Gleichgewicht halten, muss die Summe ihrer virtuellen Momente gleich 0 sein. Bezeichnet man wie im vorigen Paragraph die Seiten von $\mathfrak{abfp}$ mit C, r, D und R, die Winkel desselben aber mit α, β, φ und ψ, $\mathfrak{fn}$ mit ρ, $\mathfrak{a}o$ mit l, $\angle\ T\mathfrak{fn}$ mit ψ_1, $o\mathfrak{a}q$ mit γ, und stellt HT eine Horizontale vor, so ist das virtuelle Moment von p gleich $p d\ (\rho\ sin.\ \psi_1)$. Um das virtuelle Moment von P zu entwickeln, kann man annehmen, dass der Punkt o bei der unendlich kleinen Bewegung, welcher die Ebene oaq unterworfen ist, zweien Bewegungen zugleich sich unterziehen muss. Indem nämlich der Punkt a in seine nächste Lage a_1 übergeht, soll zunächst die Ebene oaq selbst parallel an der entsprechenden Bewegung Theil nehmen. Da aber diese Ebene auch mit der Linie ab fest verbunden ist, und diese sich bei dieser Bewegung um den $\angle\, dz$ dreht (§. 3), so muss man der Ebene, nachdem sie ihre Parallel-Bewegung vollendet, eine drehende Bewegung um den Punkt a beilegen, bei welcher dz das Mass der Drehung ist. Da nun ap oder $R \parallel r$ ist, also auch mit dem Horizonte den $\angle\, \varphi_1$ bildet, so ist das virtuelle Moment, welches aus der Parallel-Bewegung der Ebene entspringt $Pd\,(R\, sin.\, \varphi_1)$, und das virtuelle Moment, welches aus der Drehung entspringt, gleich $+\, Pd\left(l\, sin.\, (\gamma-\varphi_1)\right)$. Man erhält also die Gleichung: $pd\,(\rho\, sin.\, \psi_1) + Pd\,(R\, sin.\, \varphi_1) + Pd\left(l\, sin.\, (\gamma-\varphi_1)\right) = 0$ wo $d\psi_1 = d\varphi$, $d\varphi_1 = d\psi$ und $d\,(\gamma-\varphi_1) = dz$ ist. Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man mithin die Gleichung:

$$\text{I.}\quad p\rho\, cos.\, \psi_1\, d\varphi + PR\, cos.\, \varphi_1\, d\psi + Pl\, cos.\, (\gamma - \varphi_1)\, dz = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $d\varphi$, und setzt

$$\frac{dz}{d\varphi} = 1 - \frac{D\, sin.\, \psi}{C\, sin.\, \alpha}\ (\text{§. 3. Gl. 5}),$$

und bemerkt, dass $D\, sin.\, \psi = C\, sin.\, \alpha$ ist, weil r und R parallel sind, mithin also $dz = 0$ wird, so erhält man die Gleichung:

$$p\rho\, cos.\, \psi_1 = -\, P\, R\, cos.\, \varphi_1 \cdot \frac{d\psi}{d\varphi},$$

und da

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\, \frac{r}{R} \cdot \frac{sin.\, \beta}{sin.\, \alpha}\ (\text{§. 2. Gl. I.})$$

ist, so geht diese über in die Gleichung:

$$\text{II.}\quad p\rho\, cos.\, \psi_1 = Pr\, cos.\, \varphi_1$$

aus welcher hervorgeht, dass die Lage des Punktes o in seiner Ebene auf das Gleichgewicht keinen Einfluss übt.

Um die Empfindlickeit des Systems zu entwickeln, muss man die Gleichung I noch einmal nach φ und P differentiiren. Berücksichtigt man, dass $dz = 0$ ist, so erhält man:

$$\text{III.}\quad -p\rho\, sin.\, \psi_1\, d\varphi^2 + PR\, (-\, sin.\, \varphi_1\, d\psi^2 + cos.\, \varphi_1\, d^2\psi) + Pl\, cos.\, (\gamma - \varphi)\, d^2z + R\, cos.\, \varphi_1\, d\psi\, .\, dP = 0.$$

Da nun $r \parallel R$ ist, so ist $\alpha + \beta = \varphi + \psi = \pi$, und die Formeln 6 und 7 des §. 3. gehen in folgende über:

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = -\, \frac{r\, D\, cos.\, \alpha\, sin.\, \psi}{R\, C\, sin.^2\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

und

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = \frac{r\, D}{R\, C\, sin.^2\alpha}\, sin.\, (\psi + \alpha).$$

Dividirt man die Gleichung III durch

$$p\rho\, cos.\, \psi_1\, d\varphi^2 = Pr\, cos.\, \varphi_1\, d\varphi^2,$$

und substituirt die eben gefundenen Werthe, so erhält man:

$$-tg.\psi_1+\frac{R}{r\cos.\varphi_1}\left[-\frac{r^2}{R^2}\sin.\varphi_1-\cos.\varphi_1.\frac{\cos.\alpha\sin.\psi}{\sin.^2\alpha}.\frac{r}{R}.\frac{D}{C}\left(1-\frac{r}{R}\right)\right]$$
$$+\frac{l\cos.(\gamma-\varphi_1)}{r\cos.\varphi_1}.\frac{rD}{RC\sin.^2\alpha}.\sin.(\psi+\alpha)-\frac{dP}{P}.\frac{1}{d\varphi}=0,$$

und demnach durch Anwendung der hier bereits angegebenen Reductionen

$$\text{IV.}\quad -\frac{dP}{P.d\varphi}=tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1\left(1-\frac{r}{R}\right)cotg.\alpha+\frac{lD\cos.(\gamma-\varphi_1)\sin.(\psi+\alpha)}{RC\cos.\varphi_1\sin.^2\alpha}.$$

Zieht man von $\mathfrak{b}$ aus die Linie $\mathfrak{bg}$ || mit D, so wird $\mathfrak{ag}=R-r$ und $\sin.\mathfrak{abg}=\sin.(\psi+\alpha)$ mithin $\frac{D}{\sin.\alpha}=\frac{R-r}{\sin.(\psi+\alpha)}$. Durch diese Substitution geht das letzte Glied der Gleichung IV in $\frac{l}{C}\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\cos.(\gamma-\varphi_1)}{\sin.\alpha\cos.\varphi_1}$ über. Offenbar ist aber $\frac{l\cos.(\gamma-\varphi_1)}{\cos.\varphi_1}=\mathfrak{a}q$ und $C\sin.\alpha=$ dem Perpendikel $\mathfrak{bh}$, welches man von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{ag}$ fällen kann, und $cotg.\alpha=\frac{\mathfrak{bh}}{\mathfrak{ah}}$. Setzt man nun diese Werthe in die Gleichung IV ein, so erhält man:

$$-\frac{dP}{P}.\frac{1}{d\varphi}=tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1+\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\mathfrak{ah}}{\mathfrak{bh}}+\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\mathfrak{a}q}{\mathfrak{bh}}=tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1+\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{\mathfrak{h}q}{\mathfrak{hb}}\right).$$

Nennt man nun den veränderlichen Winkel $\mathfrak{b}q\mathfrak{h}$, ξ, und die Empfindlichkeit $-d\varphi.\frac{P}{dP}$, E, so erhält man die Gleichung

$$\text{V.}\quad -\frac{dP}{P}.\frac{1}{d\varphi}=\frac{1}{E}=tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1+\left(1-\frac{r}{R}\right)cotg.\xi.$$

Aus dieser Gleichung geht nun hervor: dass die verschiedenen Punkte der Ebene $\mathfrak{ba}q$ verschiedene Empfindlichkeit haben können. Aus der Gleichung IV. folgt aber, dass alle Punkte dieser Ebene, welche in einer physisch senkrechten Linie liegen, gleiche Empfindlichkeit haben. Wenn R und r ungleich sind, so wird die Empfindlichkeit auf der unbegrenzten Linie $\mathfrak{a}q$ alle Grössen von 0 bis ∞ durchlaufen. Bestimmt man nun in unserer Figur den Punkt dieser Linie, für welchen $E=\infty$ wird, so wird die Empfindlichkeit auf der linken Seite dieses Punktes immer mehr abnehmen, je mehr die Entfernung des belasteten Punktes von dem so eben bestimmten Punkte wächst, auf der rechten Seite dieses Punktes geben aber die Punkte der Linie $\mathfrak{a}q$ einen negativen Werth für E. Es ist aber schon im §. 1. darauf hingewiesen worden, dass für diesen Fall die eigentliche Bedeutung des Differential-Ausdruckes von $d\varphi$ aufhört, weil hier eine unendlich kleine Zunahme von φ durch keine unendlich kleine Abnahme von P hervorgebracht werden kann, sondern dass letztere eine endliche Zunahme von φ bewirken müsse. Bei einer solchen Belastung ist also das System nur in labilem Gleichgewicht denkbar, daher von einem eigentlichen Ausschlage nicht die Rede sein kann. Denjenigen Punkt der Linie $\mathfrak{a}q$, für welchen die Empfindlichkeit unendlich gross wird, werden wir den I n d i f f e r e n z - P u n k t nennen. Bezeichnet man ihn mit x, so ist die ihm entsprechende $cotg.\xi=\frac{\mathfrak{h}x}{\mathfrak{hb}}$, und man erhält mithin zu seiner Bestimmung die Gleichung:

$$\frac{1}{E}=0=tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1+\left(1-\frac{r}{R}\right)\frac{\mathfrak{h}x}{\mathfrak{hb}}$$

und

$$\mathfrak{h}x=-\left(tg.\psi_1+\frac{r}{R}tg.\varphi_1\right)\frac{R}{R-r}.\mathfrak{hb},$$

wo das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt x rechts vom Punkte $\mathfrak{h}$ liegt. Findet bei vorliegender Figur die Belastung der Ebene $\mathfrak{b}\mathfrak{a}q$ rechts von diesem Punkte statt, so kann das Gleichgewicht nur labil sein. In dem Punkte x selbst ist es indifferent, und links von diesem Punkte ist es stabil. Nehmen wir den Punkt x selbst als den Anfangspunkt auf der Linie $\mathfrak{a}q$ an, so ist die Entfernung irgend eines Punktes μ von $\mathfrak{h}$ gleich $\mu x + \mathfrak{h}x$, da der obige Werth von $\mathfrak{h}x$ negativ ist, und seine Empfindlichkeit folgt aus der Gleichung:

$$\frac{1}{E} = tg.\,\psi_1 + \frac{r}{R}\,tg.\,\varphi_1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(\frac{\mu x + \mathfrak{h}x}{\mathfrak{h}\mathfrak{b}}\right).$$

Bedenkt man aber, dass

$$0 = tg.\,\psi_1 + \frac{r}{R}\,tg.\,\varphi_1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{\mathfrak{h}x}{\mathfrak{h}\mathfrak{b}}$$

ist, so erhält man die Gleichung:

$$\text{VI.}\quad \frac{1}{E} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{x\mu}{\mathfrak{h}\mathfrak{b}}.$$

Ist die Ebene $\mathfrak{b}\mathfrak{a}q$ in verschiedenen Punkten belastet, und halten alle diese Lasten dem Gewichte p das Gleichgewicht, so kann man bei der Bestimmung der Empfindlichkeit des Systems voraussetzen, dass sämmtliche Lasten in ihrem Schwerpunkt vereinigt seien, denn die Summe der virtuellen Momente der einzelnen auf der Brücke ruhenden Lasten, ist offenbar gleich dem virtuellen Moment einer Last, welche so gross ist wie die Summe jener, und die sich im Schwerpunkt vereinigt befindet, weil man sich sämmtliche Lasten durch starre Linien ohne Schwere vereinigt, und durch eine eben solche Linie, die durch den Schwerpunkt geht, und sich senkrecht auf die Brücke stützt, getragen denken kann.

Bezeichnet man nun die Summe der einzelnen Lasten mit $S(P)$, den Abstand ihres Schwerpunktes von x mit D, so erhält man die Formel

$$-\frac{dS(P)}{d\varphi} = \frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\mathfrak{h}\mathfrak{b}}\,D.\;S(P).$$

Aber $D.\,S(P)$ ist bekanntlich $= S.\,(\mu x.\,P)$, wo $S\,(\mu x.\,P)$ die Summe aller Gewichte in ihrem respectiven Abstande vom Indifferenz-Punkte bedeutet. Man erhält mithin folgende Gleichung:

$$\text{VII.}\quad -\frac{dS(P)}{d\varphi} = \frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)S\,(\mu x.\,P)}{\mathfrak{h}\mathfrak{b}}$$

Die Ebene $\mathfrak{b}\mathfrak{a}q$ soll eine Brücken-Ebene heissen.

Nehmen wir an, dass mit dem Hebel-Arme fT eine Vertical-Ebene unwandelbar verbunden sei, so mag diese Hebel-Ebene heissen. Diese Hebel-Ebene steht nun mit der Brücken-Ebene in folgendem Gegensatze: In Bezug auf das Gleichgewicht der Last P und des Gewichtes p, sind die horizontalen Verschiebungen der Last auf der Brücke von keinem Einflusse, dagegen sind von dem entschiedensten Einflusse die Verschiebungen des Gewichtes p, nach der Richtung zum Hypomochlium des Hebels. In Bezug auf die Empfindlichkeit sind die verticalen Verschiebungen der Last, in der Brücken-Ebene von keinem Einflusse, dagegen diese Verschiebungen des Gewichtes in der Hebel-Ebene, obgleich sie auf das Gleichgewicht keinen Einfluss haben, für die Empfindlichkeit von dem entschiedensten Einflusse sind. Ferner: die horizontalen Verschiebungen der Last sind für die Empfindlichkeit von entschiedenstem Einflusse, indem die Verschiebungen des Gewichtes auf geraden Linien, die nach dem Hypomochlium des Hebels gehen, vorausgesetzt, dass die Gewichte in der Art veränderlich angenommen werden, dass sie immer derselben Last das Gleichgewicht halten, keinen Einfluss üben.

Es wird sich zeigen, dass im Allgemeinen diese Eigenschaften bei allen Brückenwagen auftreten müssen, wie auch die Verbindung der Brücke mit dem Hebel beschaffen sein möge.

§. 5.

Bestimmung der Krümmungs-Halbmesser, der von den Punkten der Brücken-Ebene beschriebenen krummen Linien.

Da in dem Parallel-Trapez $\mathfrak{abfp}$ die beiden Linien $\mathfrak{bf}$ und $\mathfrak{ap}$ parallel sind, mithin die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bei einer unendlich kleinen Bewegung parallele Wege beschreiben, so müssen alle Punkte der Brücken-Ebene $\mathfrak{ba}q$ parallele Wege beschreiben, und die Normalen der von den einzelnen Punkten beschriebenen unendlich kleinen Bögen müssen mit den Linien R und r parallel sein. Nehmen wir nun an, es solle der Krümmungs-Radius des von dem Punkte o beschriebenen unendlich kleinen Bogens bestimmt werden, (Fig. 5) so wollen wir für jetzt die Winkel φ_1 und $\psi_1 = 0$ setzen. Ist nun der Krümmungs-Radius des vom Punkte o beschriebenen Weges on oder r_1, so kann man die Empfindlichkeit dieses Punktes entweder unmittelbar nach dem vorigen Paragraphen durch die Formel

$$\frac{1}{E} = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\mathfrak{h}q}{\mathfrak{bh}}$$

bestimmen; oder man kann auch $o\mathfrak{bf}n$ als das gegebene Parallel-Trapez ansehen, und erhält

$$\frac{1}{E} = \left(1 - \frac{r}{r_1}\right) \frac{\mathfrak{h}_1 o}{\mathfrak{bh}_1}.$$

Hiernach ist

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\mathfrak{h}q}{\mathfrak{bh}} = \left(1 - \frac{r}{r_1}\right) \frac{\mathfrak{h}_1 o}{\mathfrak{bh}_1}.$$

Da aber $\mathfrak{h}_1 o = \mathfrak{h} q$ ist, so erhält man:

$$r_1 = R \, . \, r \frac{\mathfrak{hb}}{\mathfrak{hh}_1 \, . \, R + \mathfrak{h}_1 \mathfrak{b} \, . \, r},$$

woraus folgt, dass zu allen Punkten der Brücken-Ebene, welche in Linien liegen, die r und R parallel sind, gleiche Krümmungs-Halbmesser gehören.

§. 6.

Die Roberval'sche Wage.

Diejenigen Constructionen wirklicher Brückenwagen, welche sich unmittelbar an das Vorhergehende anschliessen, kann man mit Recht nach ihrem ersten Erfinder R o b e r v a l'sche nennen. Bei den grösseren derselben, welche eine beträchtliche Breite erhalten sollen, muss der Wagebalken gabelförmig auslaufen, damit die Hauptschneide desselben noch etwas breiter wie die Brücke wird, und er an zwei Punkten, die ebenfalls um die Breite der Brücke aus einander stehen, den Brückenkörper angreifen könne. Fig. 6 stellt eine solche Brückenwage perspectivisch, Fig. 7 den Durchschnitt einer solchen vor.

Ist $r = R$, oder $ab = de$, so hat man wie bei der zweischenkeligen Wage $\frac{1}{E} = tg.\,\varphi_1 + tg.\,\psi_1$ und $PR\, cos.\,\psi_1 = p\rho\, cos.\,\varphi_1$. Unter dieser Voraussetzung ist aber die Wage von der Stellung abhängig, denn mit der Stellung ändern sich die Winkel φ_1 und ψ_1, welche die Arme des Wagebalkens mit dem Horizonte bilden, mithin das Verhältniss von $p : P$. Damit die Wage also ein richtiges Resultat gibt, muss sie zuvor in die richtige Lage gebracht werden, was durch bekannte Vorrichtungen geschehen kann. Da aber dies oft vernachlässiget wird, so soll hier gezeigt werden, wie man dieselbe unabhängig von der Stellung machen kann. Dies geschieht, indem man zunächst $\varphi_1 + \psi_1 = 0$ macht. Durch eine veränderte Neigung der Wage wird der eine dieser Winkel eben so viel zunehmen wie der andere abnehmen, daher in jeder Stellung $cos.\ \varphi_1 = cos.\ \psi_1$ sein. Hiedurch wird offenbar obige Gleichung unabhängig von der Stellung der Wage. Es ist aber

$$\frac{1}{E} = \left(1 - \frac{r}{R}\right) cotg.\ \xi + \frac{r}{R} tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1$$

und daher für diesen Fall

$$\frac{1}{E} = \left(1 - \frac{r}{R}\right) (cotg.\ \xi - tg.\ \varphi_1).$$

Damit also das Gleichgewicht stabil werde, muss, wenn $r < R$, auch $cotg.\ \xi$ immer $> tg\,\varphi_1$ werden. Beides würde durch eine Construction wie Taf. X, Fig. 8, zeigt, erreicht werden. Es ist aber wohl zu bemerken, dass die Empfindlichkeit solcher Wagen auf zweifache Weise veränderlich ist. Sie hängt 1) von dem $\angle\,\xi$ ab, oder von der Stelle, welche die Last auf der Brücke einnimmt, und wird um so geringer sein, je mehr die Last sich dem Ende der Brücke nähert, und 2) hängt sie von der Stellung der Wage oder von dem $\angle\,\varphi_1$ ab. Es ergibt sich aus der vorigen Gleichung, dass die Verbindungs-Linie von der Schneide des Wagebalkens, welche in die Brücke eingreift, bis zum Schwerpunkt der Last, durch die Neigung der Brücke nicht die senkrechte Richtung erreichen darf, ohne dass das Gleichgewicht indifferent wird. Dieselbe zweifache Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Stellung der Wage und von der Lage der Last auf der Brücke, ist aber einem grossen Theile der sonst gebräuchlichen Brückenwagen eigen.

Über das Ajustement des Wagebalkens ist noch zu bemerken, dass, wenn die Wage so beschaffen sein soll, dass sie bei Veränderungen der Lage dennoch immer richtig einspiele, ein Theil des in dem Schwerpunkte des Wagebalkens vereinigten Gewichtes desselben, mit der unteren Strebe in indifferentem Gleichgewichte sein muss, und ein anderer Theil nebst der Schale mit dem Gewichte des Brückenkörpers. Dies wird dadurch erreicht, dass der Schwerpunkt des Wagebalkens auf die gerade Linie zwischen seinen drei Schneiden fällt, und der Schwerpunkt der Strebe auf die Linie zwischen ihren Pfannenschnitten.

§. 7.

Über die Abhängigkeit der Empfindlichkeit jeder Brückenwage von der Stellung der Last auf der Brücke.

Auf welche Weise der Brückenkörper einer Wage auch gehoben werden mag, wenn derselbe, wie es in seinem Begriffe liegt, in Bezug auf das Gleichgewicht, gleichgiltig gegen den Ort der Belastung sein soll, so müssen bei einer unendlich kleinen Bewegung aus der Normal-Stellung die verschiedenen Punkte desselben Bögen mit parallelen Tangenten beschreiben. Die Krümmungs-Radien zweier solcher Bögen können willkürlich angenommen werden, und wenn, wie es bei den bis jetzt in Gebrauch gekommenen Constructionen der Fall ist, je zwei solcher Krümmungs-Radien selbst parallel sind, so kann man jede solcher Brücken als die Brücke einer Roberval'schen Wage ansehen. Nimmt man nun einen Augenblick an, der Krümmungs-Radius des unendlich kleinen Weges, den der Punkt a, Fig. 9, beschreibt, sei fest mit dem Wagebalken bc oder ρ verbunden, und bezeichnet man mit Δ und Δ_1 die verschiedenen Zunahmen des Gewichtes P, die an den Stellen t und t_1 einen gleichen Ausschlag bewirken, so hat man die beiden Gleichungen:

$$-\frac{\Delta}{P} \cdot \frac{1}{d\varphi} = tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1 \cdot \frac{r}{R} + \left(1 - \frac{r}{R}\right) cotg.\ \xi$$

$$-\frac{\Delta_1}{P} \cdot \frac{1}{d\varphi} = tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1 \cdot \frac{r}{R} + \left(1 - \frac{r}{R}\right) cotg.\ \xi_1$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit $\frac{d\varphi}{d\psi} = -\frac{R}{r}$ und zieht sie von einander ab, so erhält man:

$$-\frac{\Delta}{P} \cdot \frac{1}{d\psi} + \frac{\Delta_1}{P} \cdot \frac{1}{d\psi} = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)$$

eine Gleichung, welche ganz unabhängig von der Art und Weise sein muss, wie die Brücke gehoben wird, weil man sie auch als Bedingungs-Gleichung dafür ansehen kann, dass die virtuellen Momente von $P + \Delta$ und $P + \Delta_1$ an den Punkten t und t_1, nachdem sich R um den $\angle\, d\psi$ gesenkt hat, gleich sind; denn beide virtuellen Momente müssen dem virtuellen Momente von p, nachdem sich ρ um den $\angle\, d\varphi$ gehoben hat, gleich sein.

Nimmt man nun an, dass sich der wirkliche Wagebalken um den $\angle\, d\mu$ hebt, wenn sich R um $d\psi$ senkt, so erhält man aus jener Gleichung durch Multiplication mit $\frac{d\psi}{d\mu}$ die folgende:

$$-\frac{\Delta}{P} \cdot \frac{1}{d\mu} + \frac{\Delta_1}{P} \cdot \frac{1}{d\mu} = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)\frac{d\psi}{d\mu}$$

oder

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)\frac{d\psi}{d\mu}.$$

Kennt man also die Empfindlichkeit irgend einer Brückenwage an einer beliebigen Stelle, und ausserdem R und r ihrer Grösse und Lage nach, sowie $\frac{d\psi}{d\mu}$, so kann man die Empfindlichkeit an jeder anderen Stelle angeben. Auch kann man durch diese Formel leicht darthun, dass, wenn man die Empfindlichkeit zweier verschiedenen Stellen einer Brücke kennt, man die Empfindlichkeit an jeder anderen Stelle leicht berechnen kann.

§. 8.

Von der Empfindlichkeit der Roberval'schen Wage mit zwei Brücken.

Nimmt man an, dass sich in einer einfachen Roberval'schen Wage die Last senkrecht unter dem Aufhängepunkte der Brücke befinde, so kann man auch annehmen, dass sich in Bezug auf die Empfindlichkeit dieselbe im Aufhängepunkte vereinigt befinde (§. 5). Man erhält hier also wie beim einfachen Wagebalken die Formel

$$\frac{1}{E} = tg.\varphi_1 + tg.\ \psi_1.$$

Geht nun aber der Belastungspunkt, aus der Lage q senkrecht unter dem Aufhängepunkt m, in die Lage p über (Fig. 10), so erhält man nach §. 7 für diesen Punkt die Gleichung:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)\frac{d\psi}{d\mu}$$

und mithin, da hier

$$\frac{1}{E_1} = tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1,\ cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1 = \frac{pq}{H} \text{ oder } \frac{D}{H}$$

ist, wenn H den senkrechten Abstand von r und R bezeichnet, und $\frac{d\psi}{d\mu} = -\frac{r}{R}$ ist, erhält man für den veränderlichen Punkt p die Gleichung

$$\frac{1}{E} = tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{D}{H},$$

die, wie man sich leicht überzeugen kann, mit der Formel des §. 6, ihrem Werthe nach, übereinstimmt.

Da die Empfindlichkeit der Wage dieselbe bleibt, ob sich die Last senkrecht unter dem Aufhängepunkt der Brücke, oder in demselben befindet, so muss das virtuelle Moment von $P + \Delta$, nachdem sich die Strebe um den $\angle\, d\psi$ geneigt hat, dasselbe sein, in welchem Punkte der senkrechten Linie, die durch den Aufhängepunkt geht, und die zum Brückenkörper gehört, sich diese Last befinde. Befindet sich demnach die Zunge einer Roberval'schen Wage mit zwei Brücken am Wagebalken, und die beiden Lasten senkrecht unter den Aufhängepunkten a und c (Fig. 11), so muss auch hier die Gleichung gelten

$$\frac{1}{E} = tg.\, \varphi_1 + tg.\, \psi_1.$$

Denn diese gibt nur an, dass das virtuelle Moment von $P + \Delta$, nachdem sich R oder de um den $\angle\, d\psi$ gedreht hat, gleich dem virtuellen Momente von Q sei, nachdem sich R_1 oder fg um den entsprechenden $\angle\, d\psi_1$ gedreht hat; da diese Gleichung richtig für die Aufhängepunkte selbst ist, so ist sie auch für alle die Punkte beider Brückenkörper richtig, die unter jenen liegen. Verlegt man nun die Last P nach dem Punkte p, dessen Entfernung von q gleich D ist, so wird man hiedurch wie oben

$$\frac{1}{E} = tg.\, \varphi_1 + tg.\, \psi_1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{D}{H}$$

erhalten, wo H den senkrechten Abstand von r und R bedeutet, und $D = pq$ ist. Verlegt man nun auch die Last Q von dem Punkte q_1 nach p_1, so wird man wieder durch Anwendung derselben Formel des §. 7 erhalten:

$$\frac{1}{E} = tg.\, \varphi_1 + tg.\, \psi_1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{D}{H} + \left(1 - \frac{r_1}{R_1}\right) \frac{D_1}{H_1}$$

wo H_1 die Entfernung von r_1 bis R_1 bedeutet, und $D_1 = p_1 q_1$ ist. Diese Formel gibt ganz allgemein die Empfindlichkeit einer Roberval'schen Wage mit zwei Brücken an, und es ist leicht, von ihr ähnliche Ableitungen zu machen, wie sie oben für einfache Roberval'sche Wagen gemacht sind.

§. 9.

Die George'sche Wage.

Die George'sche Wage unterscheidet sich insoferne von der Roberval'schen, als die Functionen, welche bei der Roberval'schen der Wagebalken allein auszuführen hat, hier von zwei besonderen Theilen verrichtet werden. Der Wagebalken der George'schen Wage hat die Brücke nicht zu leiten, sondern auf dieselbe nur einen Hub von bestimmter Richtung auszuüben, und hängt durch eine Kette mit einem festen Punkte der Brücke zusammen; dafür tritt aber noch ein besonderer Theil, eine Kette, die parallel mit der Strebe ist, und welche die Strebenkette heissen mag, ein.

Der Wagebalken (Fig. 12) ist abE, ik die Strebe, am die Kette, welche die Schneide a des Wagebalkens mit der Nase sn, welche fest an der Brücke sitzt, verbindet. Der erwähnte besondere Theil ist die Strebenkette fg. Die Strebe ik und die Strebenkette fg müssen parallel sein, wenn die Stellung der Last auf der Brücke, in Bezug auf das Gleichgewicht gleichgültig sein soll, denn nur in diesem Falle sind die virtuellen Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte der Brücke von gleicher Grösse. Es versteht sich von selbst, dass wie bei der Roberval'schen Wage die Strebe doppelt sein muss, hier Strebe und Strebenkette doppelt sein müssen, und dass der Wagebalken gabelförmig geformt sein muss. (Vgl. §. 6.)

Um die Empfindlichkeit dieser Wage zu bestimmen, sollen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{c}$ (Fig. 13) die drei Schneiden des Wagebalkens vorstellen, $fg = l$ die Strebenkette, $ik = L$ die Strebe und $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ die Kette, welche die

Schneide $\mathfrak{b}$ mit der Nase sn verbindet. Gesetzt, $\mathfrak{a}$ beschreibe bei der Schwingung der Wage einen Kreisbogen, dessen Radius $\mathfrak{ap} = R$ ist, so ist zunächst zu bemerken, dass $\mathfrak{ap}$ parallel mit fg und ik sein muss. Bilden also diese mit dem Horizonte den $\angle \psi_1$, so bildet R einen gleichen Winkel mit demselben. Setzt man nun $\mathfrak{fc} = \rho$ und den Winkel, welchen ρ mit dem Horizonte bildet $= \varphi_1$, so ist, wenn sich die Last P im Punkte $\mathfrak{a}$ befindet (§. 2)

$$-\frac{dP}{Pd\varphi} = tg.\ \varphi_1 - tg.\ \psi_1 \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d^2\psi}{d\psi \cdot d\varphi}.$$

Es ist aber (§. 3, Gl. 4 und 6)

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha} \text{ und } \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{rD}{RC\ sin.^2\alpha}\left[sin.\ \psi\ cos.\ \beta + \frac{r}{R}\ sin.\ \beta\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\right],$$

mithin

$$\frac{d^2\psi}{d\psi \cdot d\varphi} = -\frac{D}{C\ sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}\left[sin.\ \psi\ cos.\ \beta + \frac{r}{R}\ sin.\ \beta\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\right]$$

und daher

$$-\frac{dP}{P} \cdot \frac{1}{d\varphi} = tg.\ \varphi_1 + \frac{r}{R} \cdot \frac{sin.\ \beta}{sin.\ \alpha} \cdot tg.\ \psi_1 - \frac{D}{C\ sin.\ \alpha}\left[sin.\ \psi\ cotg.\ \beta + \frac{r}{R}\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\right].$$

Ist D und C oder $\mathfrak{fp}$ und $\mathfrak{ab}$, wie es meistentheils der Fall ist, im Verhältnisse zu r sehr gross, und die Neigung von r und R sehr klein, so kann man mit grosser Annäherung

$$\frac{D}{C} = \frac{sin.\ \alpha}{sin.\ \psi}$$

setzen, und erhält:

$$-\frac{dP}{P} \cdot \frac{1}{d\varphi} = tg.\ \varphi_1 + \frac{r}{R} \cdot \frac{sin.\ \beta}{sin.\ \alpha} \cdot tg.\ \psi_1 - cotg.\ \beta - \frac{r\ sin.\ \varphi}{R\ sin.\ \psi}\ cotg.\ \alpha.$$

Soll die Stellung keinen Einfluss auf das Verhältniss $p : P$ haben, so muss $\varphi_1 + \psi_1 = 0$ sein. Legt man die drei Schneiden des Wagebalkens $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{c}$ in gerader Linie, so ist $\pi = \alpha + \beta = \varphi + \psi$, und man erhält daher

$$-\frac{dP}{P} \cdot \frac{1}{d\varphi} = (tg.\ \varphi_1 + cotg.\ \alpha)\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Sind nun wie bei den gewöhnlichen Constructionen dieser Wagen, Strebe und Strebenkette oder l und L einander gleich, so ist R mit beiden gleich, und die Wage hat alsdann, in welchem Punkte sie auch belastet werden mag, gleiche Empfindlichkeit, da die virtuellen Geschwindigkeiten aller Punkte der Brücke gleich sein müssen. Die Empfindlichkeit bleibt aber auch in diesem Falle von der Neigung der Brücke, oder von der Stellung der Wage abhängig, und ist um so grösser je kleiner der $\angle \varphi_1$ ist. Ist l nicht $= L$, so ist

$$R = l \cdot L \cdot \frac{H}{Lh + lh_1} \text{ (§. 5)},$$

wo H, h und h_1 die Entfernungen von L und l, von L und R und von l und R bedeuten. Dieser Werth ist alsdann in die obigen Gleichungen dieses Paragraphen einzusetzen und $\frac{1}{E_1}$ zu bestimmen. Dann erhält man für die Empfindlichkeit jedes anderen Punktes der Brücke, nach §. 7 die Gleichung:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)\frac{d\psi}{d\mu}$$

oder hier:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \left(1 - \frac{r}{R}\right)\frac{D}{H_1} \cdot \frac{sin.\ \beta}{sin.\ \alpha}$$

wo H_1 die Entfernung von r und R, und D die Entfernung des Schnittpunktes einer Senkrechten mit der Verlängerung von R bedeutet, wenn diese Senkrechte durch den Punkt der Belastung geht, bis zum Punkte $\mathfrak{a}$.

§. 10.

Die Strassburger Brückenwage (Taf. XI, Fig. 14 und 15).

In der Durchschnitts-Zeichnung stellt $\mathfrak{p}\mathfrak{k}\mathfrak{a}$ einen Hebel (das Dreieck bei wirklichen Constructionen), $\mathfrak{k}\mathfrak{a}_1$, die Brücke, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{c}$ den Wagebalken vor, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ sind zwei Ketten, welche den Wagebalken mit dem Hebel und der Brücke verbinden.

Damit die Brücke in allen Punkten gleiche virtuelle Geschwindigkeit habe, wenn der Wagebalken sich unendlich wenig bewegt, ist es hinreichend, wenn dieselbe in zwei verschiedenen Punkten, wie $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a}_1$ gleiche virtuelle Geschwindigkeit hat. Da sie alsdann in allen Punkten gleiche virtuelle Geschwindigkeit haben muss, so müssen auch die virtuellen Momente einer Last, unabhängig von dem Punkte der Belastung der Brücke sein. Wählt man nun die Bezeichnung der Figuren, welche der der §§. 3 und 4 entspricht, und bezeichnet den Winkel, welchen $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ oder ρ_1 mit dem Horizonte bildet mit $-\nu$, so ist die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{k} = d\rho_1\ sin.\ (-\nu) = \rho_1\ cos.\ \nu d(-\psi) = -\ \rho_1\ cos.\ \nu d\psi$; die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{a}_1$ ist:

$$dR_1\ sin.\ (-\nu) = -\ R_1\ cos.\ \nu d\psi_2,$$

wo R_1 den Krümmungs-Radius des Bogens bedeutet, den $\mathfrak{a}_1$ bei sehr kleiner Bewegung beschreibt. Da die Bögen, welche k und $\mathfrak{a}_1$ bei sehr kleiner Bewegung beschreiben, parallele Tangenten haben müssen, weil sonst diese Punkte nicht gleiche virtuelle Geschwindigkeiten haben könnten, so sind auch ihre zugehörigen Krümmungs-Radien, nämlich ρ_1 und das noch unbekannte R_1 oder $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$ parallel, und bilden also gleiche Winkel $-\ \nu$ mit dem Horizonte. Setzt man nun die virtuellen Geschwindigkeiten von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a}_1$ einander gleich, so erhält man

$$\rho_1\ cos.\ \nu d\psi = R\ cos.\ \nu d\psi_2.$$

Nun ist (Gl. 1, §. 3)

$$\frac{d(-\psi)}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha},\ \frac{d(-\psi_2)}{d\varphi} = -\ \frac{r_1\ sin.\ \beta_2}{R_1\ sin.\ \alpha_2},$$

mithin

$$\frac{d\psi}{d\psi_2} = \frac{r}{R} \cdot \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{sin.\ \beta\ sin.\ \alpha_2}{sin.\ \alpha\ .\ sin.\ \beta_2}$$

und daher

$$\text{I.)}\ \rho_1\ cos.\ \nu \,.\, \frac{rR_1}{Rr_1} \cdot \frac{sin.\ \beta}{sin.\ \alpha} \cdot \frac{sin.\ \alpha_2}{sin.\ \beta_2} = R_1\ cos.\ \nu,$$

woraus folgt, dass

$$\text{II.)}\ \rho_1\ sin.\ \alpha_2 : R\ sin.\ \alpha = r_1\ sin.\ \beta_2 : r\ sin.\ \beta.$$

Es ist bei dieser Ableitung allerdings schon vorausgesetzt, dass ρ_1 und R_1 parallel sind; — dies kann aber auch mit Recht geschehen, denn wären die Winkel $-\nu$ auch nicht unter einander gleich, so liessen sich doch die Grössen ρ_1, r und r_1 so annehmen, dass sie die Gleichung I realisirten. Ist diese Gleichung aber realisirt, so ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{f}$ eine Brücke, und ρ_1 muss parallel R_1 oder beide Winkel $-\nu$ müssen gleich sein.

Zieht man durch $\mathfrak{f}$ eine Linie $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \parallel \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, so heisst offenbar die Proportion II: dass sich die Perpendikel von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gefällt, verhalten müssen, wie die Perpendikel von $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gefällt.

Um die Empfindlichkeit einer Strassburger Wage im Allgemeinen beurtheilen zu können, müsste man zunächst den Krümmungs-Radius R_1 aus den gegebenen Stücken berechnen. Da dies aber einerseits eine ziemlich weitläufige Rechnung voraussetzt, und andererseits die Empfindlichkeit bei den gewöhnlichen Constructionen sich mit grosser Annäherung ohne diese Rechnung angeben lässt, so soll hier gezeigt werden, wie sich diese Wagen leicht so einrichten lassen, dass die Brücke überall gleiche Empfindlichkeit habe, und wie jene angenäherte Rechnung zu führen sei.

Es kommt zunächst darauf an, die Empfindlichkeit der Brücke an den Punkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}_1$ zu entwickeln. Nennen wir die erstere E_1 die zweite E_2, so erhalten wir (§. 2)

$$\frac{1}{E_1} = tg.\ \varphi_1 - tg.\ (-\nu)\ \frac{d(-\psi)}{d\varphi} + \frac{d^2(-\psi)}{d(-\psi)\,d\varphi}.$$

Es ist aber

$$\frac{d(-\psi)}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha}$$

und

$$\frac{d^2(-\psi)}{d\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{d(-\psi)} = -\frac{D}{C\,sin.\ \alpha}\left[sin. - \psi\,cotg.\,\beta + \frac{r}{R}\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\right].$$

Setzt man aber voraus, dass ρ_1 mit R seiner Richtung nach zusammenfällt, und dass mit beiden r parallel sei, so ist

$$\frac{D}{C} = \frac{sin.\ \alpha}{sin.(-\psi)}\ \text{und}\ \frac{sin.\ \beta}{sin.\ \alpha} = \frac{sin.\ \varphi}{sin.\ (-\psi)} = -1$$

und mithin

$$\frac{d(-\psi)}{d\psi} = +\frac{r}{R}$$

und

$$-\frac{d^2(-\psi)}{d\varphi\,d(-\psi)} = cotg.\ \beta - \frac{r}{R}\ cotg.\ \alpha = -\ cotg.\ \alpha\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

und daher

$$\frac{1}{E_1} = tg.\ \varphi_1 + \frac{r}{R}\ tg.\ (-\nu) + \left(1 + \frac{r}{R}\right) cotg.\ \alpha.$$

Setzt man nun voraus, dass r_1 ebenfalls mit R_1 parallel sei, so erhält man auf gleiche Weise:

$$\frac{1}{E_2} = tg.\ \varphi_1 + \frac{r_1}{R_1}\ tg.\ (-\nu) + \left(1 + \frac{r_1}{R_1}\right) cotg.\ \alpha_2.$$

Sind nun auch beide Ketten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ parallel, und liegt auch R mit R_1 in derselben Richtung, so ist $\alpha_2 = \alpha$ und (§. 5) $R_1 = \rho_1$, und mithin

$$\frac{1}{E_2} = tg.\ \varphi_1 + \frac{r_1}{R_1}\ tg.\ (-\nu) + \left(1 + \frac{r_1}{\rho_1}\right) cotg.\ \alpha.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen geht aber die Proportion II) in: $\rho_1 : R = r_1 : r$ über, woraus $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r}{R}$ folgt. Hiernach ist also $\frac{1}{E_1} = \frac{1}{E_2}$. Diese Gleichung kann aber nur stattfinden, wenn die Krümmungs-Radien der Wage, welche sämmtliche Punkte der Brücken bei einer unendlich kleinen Bewegung beschreiben, gleich sind (§. 7). Dies letztere muss also stattfinden, wenn ρ_1 und R in gerader Linie liegen, ebenso r und r_1 und wenn die beiden Ketten parallel sind. Legt man mithin die drei Schneiden des oberen Wagebalkens mit dem Hypomochlium $\mathfrak{f}$ in gerader Linie, ebenso die drei Schneiden des unteren Wagebalkens (des Dreieckes) nämlich $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a}$, und macht die beiden Ketten parallel, so ist die Empfindlichkeit der Brücke auf allen Punkten gleich:

$$tg.\ \varphi_1 \left(1 - \frac{r_1}{\rho_1}\right) + \left(1 + \frac{r_1}{\rho_1}\right) cotg.\ \alpha.$$

Nur das erste Glied dieses Ausdruckes hängt von der Stellung der Wage ab. Das Gleichgewicht selbst ist aber von der Stellung unabhängig (§. 2). Bei horizontaler Stellung des Wagebalkens erhält man

$$\frac{1}{E} = \left(1 + \frac{r_1}{\rho_1}\right) tg.\ x,$$

wenn x den Winkel bedeutet, den bei dieser Stellung eine physisch senkrechte Linie, die in $\mathfrak{b}$ gezogen ist, mit der Kette $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ bildet.

Die gewöhnlichen Constructionen weichen sehr von den hier aufgestellten Regeln ab. Da aber die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a}$ so ziemlich immer in gerader Linie liegen, so wird man sich nicht sehr von der Wahrheit entfernen, wenn man annimmt, dass diese drei Punkte wirklich in gerader Linie liegen. Alsdann ist R_1 bekannt und gleich ρ_1 und $\mathfrak{f}\mathfrak{p}_1$ leicht zu ermitteln.

Durch die obigen Formeln kann man nun $\frac{1}{E_1}$ und auf gleiche Weise $\frac{1}{E_2}$ bestimmen. Denkt man sich nun durch den Schwerpunkt o der Last eine senkrechte Linie gelegt, und nennt den Schnittpunkt derselben mit der Linie $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$, w, und nimmt an, irgend ein Punkt z der Brücke, der ausser der Linie $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ liegt, beschreibe bei einer unendlich kleinen Bewegung der Brücke einen Bogen, dessen Krümmungs-Radius ρ_2 ist, so erhält man, wenn E die Empfindlichkeit des Punktes w ist, nach §. 7, folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)(cotg.\ \xi_2 - cotg.\ \xi_1)\ \frac{d(-\psi)}{d\varphi_1}$$

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)(cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1)\ \frac{d(-\psi)}{d\varphi_1}.$$

Da nun aber

$$cotg.\ \xi - cotg.\ \xi_1 : cotg.\ \xi_2 - cotg.\ \xi_1 = \mathfrak{k}w : \mathfrak{k}\mathfrak{a}_1$$

verhält, so ist

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} = \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)\frac{\mathfrak{k}w}{\mathfrak{k}\mathfrak{a}_1}$$

und daher

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)\frac{\mathfrak{k}w}{\mathfrak{k}\mathfrak{a}_1}.$$

$d\psi$ ist der unendlich kleine Winkel, den ρ_1 beschreibt, wenn ρ den Winkel $d\varphi_1$ macht.

§. 11.

Da es von theoretischem Interesse ist, den Krümmungs-Radius R_1 zu bestimmen, auch wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}_1$ nicht in gerader Linie liegen, so soll hier der Weg angedeutet werden, wie dies auf die einfachste Weise geschehen kann.

Wenn bei einer George'schen Wage die Last im Angriffspunkte der Kette in $\mathfrak{a}$ concentrirt ist, so wurde im §. 9 der Ausdruck gefunden:

$$-\frac{dP}{P}\cdot\frac{1}{d\varphi}=tg.\,\varphi_1+\frac{r}{R}\cdot\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha}\cdot tg.\,\psi_1-\frac{D}{C\,sin.\,\alpha}\left[sin.\,\psi\;cotg.\,\beta+\frac{r}{R}\,sin.\,\varphi\,.\,cotg.\,\alpha\right].$$

Nun ist aber offenbar:

$$D\,sin.\,\psi=C\,sin.\,\alpha+r\,sin.\,(\alpha+\beta-\pi)=C\,sin.\,\alpha-r\,sin.\,(\alpha+\beta)$$

und

$$D\,sin.\,\varphi=C\,sin.\,\beta+R\,sin.\,(\alpha+\beta-\pi)=C\,sin.\,\beta-R\,sin.\,(\alpha+\beta),$$

mithin

$$\frac{D}{C\,sin.\,\alpha}\left[sin.\,\psi\;cotg.\,\beta+\frac{r}{R}\,sin.\,\varphi\;cotg.\,\alpha\right]=$$

$$\frac{\left[C\,sin.\,\alpha-r\,sin.\,(\alpha+\beta)\right]cotg.\,\beta+\left[C\,sin.\,\beta-R\,sin.\,(\alpha+\beta)\right]\frac{r}{R}\,cotg.\,\alpha}{C\,sin.\,\alpha}=$$

$$cotg.\,\beta+\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha}\,cotg.\,\alpha\,.\,\frac{r}{R}-\frac{r}{C\,sin.\,\alpha}\,sin.\,(\alpha+\beta)\,(cotg.\,\beta+cotg.\,\alpha)$$

und daher:

$$-\frac{dP}{P}\cdot\frac{1}{d\varphi}=tg.\,\varphi_1-cotg.\,\beta_1+\frac{r}{R}\,\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha}\,(tg.\,\psi_1-cotg.\,\alpha)+\frac{r}{C}\,\frac{sin.^2(\alpha+\beta)}{sin.^2\alpha\;sin.\,\beta}$$

oder

$$\frac{1}{E}=tg.\,\varphi_1-cotg.\,\beta_1-\frac{r}{R}\,\frac{sin.\,\beta\;cos.\,(\alpha+\psi_1)}{sin.^2\alpha\;cos.\,\psi_1}+\frac{r}{C}\cdot\frac{sin.^2(\alpha+\beta)}{sin.^2\alpha\,.\,sin.\,\beta}.$$

$\alpha+\psi_1$ ist aber offenbar der Winkel, welchen die Kette $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit dem Horizonte bildet. Ist dieser Winkel ein rechter, so ist $cos.(\alpha+\psi_1)=0$, und es tritt der merkwürdige Umstand ein, dass alsdann $\frac{1}{E}$ unabhängig von der Grösse R wird, da in diesem Falle R nicht mehr in dem Ausdrucke $\frac{1}{E}$ vorkommt. Nur die Richtung von R hat alsdann noch Einfluss auf $\frac{1}{E}$.

Stellt man nun die Strassburger Wage so auf, dass die Kette $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ senkrechte Richtung hat, so erhält man:

$$\frac{1}{E_2}=tg.\,\varphi_1-cotg.\,\beta_2+\frac{r_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}\;\frac{sin.^2(\alpha_2+\beta_2)}{sin.^2\alpha_2\,.\,sin.\,\beta_2}.$$

Nennt man nun den Schnittpunkt einer Senkrechten, die durch $\mathfrak{a}_1$ geht mit $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, s, so ist die Empfindlichkeit in s ebenfalls E_2 und man erhält:

$$\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}=\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)(cotg.\,\xi_2-cotg.\,\xi_1)\,\frac{d(-\psi)}{d\varphi_1}=-\left[1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\mathfrak{f}s}{\mathfrak{a}_1 s}\cdot\frac{r\,sin.\,\beta}{R\,sin.\,\alpha},$$

aus welcher Gleichung man den gesuchten Krümmungs-Halbmesser ρ_2 entwickeln kann, da E_2 und E_1 jetzt bekannt sind.

§. 12.

Construction von Brückenwagen, welche besonders für schwere und ausgedehnte Lasten angewendet werden.

Macht man aus dem oberen Wagebalken der Strassburger Wage ebenfalls ein Dreieck, und hebt den oberen Hebel, vermöge einer Kette durch einen besonderen Hebel, so erhält man eine besondere Construction von Wagen (Taf. X, Fig 16 und Taf. XI, Fig. 17), welche vorzüglich für grosse und schwere Lasten geeignet ist.

Es folgt sogleich, dass auch hier dieselbe Bedingungs-Gleichung wie dort stattfinden müsse, nämlich: die Perpendikel von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gefällt, müssen sich verhalten wie die Perpendikel von $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gefällt, wenn $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \parallel \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ ist.

Da die Schwingungs-Ebene des Hebels mit denen der Dreiecke bei dieser Construction oft nicht übereinstimmt, so ist zur Untersuchung über die Empfindlichkeit zunächst folgende Aufgabe zu lösen.

§. 13.

In dem windschiefen Vierseite (Fig. 18) $\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ von unveränderlichen Seiten drehen sich die beiden Seiten $\mathfrak{b}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ oder r und R um die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$ in zwei gegebenen Ebenen e und E. Ist nun $\mathfrak{f}\mathfrak{p}_1$ die Projection von $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ auf e, und $\mathfrak{p}\mathfrak{f}_1$ die Projection von $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ auf E, bezeichnet man ferner den $\angle\, \mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{p}_1$ mit φ den $\angle\, \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ mit ψ, so sind die Differential-Verhältnisse $\frac{d\psi}{d\varphi}$ und $\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$ zu finden.

Wählt man die Bezeichnung wie in Fig. 15 und bedenkt, dass die Ebene $\mathfrak{p}\mathfrak{f}\mathfrak{p}_1$ mit e einen rechten Winkel bildet, ebenso $\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{f}_1$ mit E, so ist nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie $cos.\, \mu = cos.\, \varphi.\, cos.\, \nu$ und $cos.\, \mu_1 = cos.\, \psi.\, cos.\, \nu_1$. Man erhält daher da ν und ν_1 oder die Winkel, welche $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ mit seinen Projectionen in den Ebenen e und E bildet, constante Grössen sind, folgende Gleichungen:

$$1)\ sin.\, \mu\ d\mu = cos.\, \nu\ sin.\, \varphi\ d\varphi,$$

$$2)\ sin.\, \mu_1\, d\mu_1 = cos.\, \nu_1\ sin.\, \psi\ d\psi,$$

und durch gleiche Betrachtungen wie in §. 3.

$$3)\, \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{r\ sin.\, \beta}{R\ sin.\, \alpha}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$R^2 + C^2 - 2RC\ cos.\, \alpha = D^2 + r^2 - 2Dr\ cos.\, \mu,$$

welche beide Ausdrücke gleich $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2$ sind, 4) $RC\ sin.\, \alpha\ d\alpha = Dr\ sin.\, \mu\ d\mu$ und auf ähnliche Weise

$$5)\ rC\ sin.\, \beta\ d\beta = RD\ sin.\, \mu_1\ d\mu_1.$$

Aus Gleichung 1) und 4) folgt

$$6)\, \frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{cos.\, \nu.\ sin.\, \varphi}{sin.\, \mu}$$

und

$$7)\, \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{rD\ sin.\, \mu}{RC\ sin.\, \alpha},$$

und durch Multiplication von 6) und 7) folgt

$$8)\ \frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{rD}{RC}\cdot\frac{cos.\ \nu\ sin.\ \varphi}{sin.\ \alpha}.$$

Aus Gleichung 2) und 5) folgt

$$9)\ \frac{d\mu_1}{d\psi}=\frac{cos.\ \nu_1\ sin.\ \psi}{sin.\ \mu_1}$$

und

$$10)\ \frac{d\beta}{d\mu_1}=\frac{RD\,sin.\ \mu_1}{rC\ sin.\ \beta}.$$

Aus Multiplication von 9), 10) und 3) folgt

$$11)\ \frac{d\beta}{d\varphi}=-\frac{D}{C}\cdot\frac{cos.\ \nu_1\ sin.\ \psi}{sin.\ \alpha}.$$

Nun erhält man durch Differentiation der Gleichung 3)

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=-\frac{r}{R}\left\{\frac{sin.\ \alpha\ cos.\ \beta\frac{d\beta}{d\varphi}-sin.\ \beta\ cos.\ \alpha\frac{d\alpha}{d\varphi}}{sin.\ ^2\alpha}\right\},$$

wenn man $d^2\varphi=0$ setzt, und durch Substitution aus den Gleichungen 8) und 11) folgt:

$$12)\ \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=\frac{rD}{RC}\left\{sin.\ \psi\ cos.\ \nu_1\ cos.\ \beta+\frac{r}{R}\,sin.\ \beta\ cotg.\ \alpha\ cos.\ \nu\ sin.\ \varphi\right\}\frac{1}{sin.\ ^2\alpha}$$

und durch Gleichung 3)

$$13)\ \frac{d^2\psi}{d\varphi\ .\ d\psi}=-\frac{D}{C\ sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}\left\{sin.\ \psi\ cos.\ \nu_1\ cos.\ \beta+\frac{r}{R}\,sin.\ \beta\ cotg.\ \alpha\ cos.\ \nu\ sin.\ \varphi\right\}.$$

§. 14.

Setzen wir nun voraus, mit r und R (Fig. 19) seien zwei bewegliche Hebel-Ebenen, die der Richtung nach mit e und E zusammenfallen, verbunden, und die Linie $\mathfrak{pk}$ gehöre zur Ebene E und ρ zur Ebene e, ferner sei auf ρ der Punkt m mit dem Gewichte p, und auf $\mathfrak{pk}$ der Punkt $\mathfrak{k}$ mit dem Gewichte P belastet, und ρ und $\mathfrak{pk}$ bilden mit dem Horizonte die Winkel φ_1 und ψ_1, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dP}{Pd\varphi}-tg.\ \psi_1\frac{d\psi}{d\varphi}+tg.\ \varphi_1+\frac{d^2\psi}{d\psi\ .\ d\varphi}=0$$

wenn sich p und P das Gleichgewicht halten. (Vergl. §. 2). Durch Substitution der entwickelten Werthe folgt nun:

$$\frac{1}{E}=tg.\ \varphi_1+tg.\ \psi_1\,.\,\frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha}-\frac{D}{C\,sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}\ (sin.\ \psi\ cos.\ \beta\ cos.\ \nu_1+\frac{r}{R}\,sin.\ \beta\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\ cos.\ \nu).$$

Sind demnach die Winkel β und α rechte und $\psi_1=0$ so ist $\frac{1}{E}=tg.\ \varphi_1$ wie beim blossen Wagebalken $\mathfrak{bf}m$, wenn der Arm $\mathfrak{bf}$ horizontal ist.

Stellt $\mathfrak{bf}m$ den Wagebalken und $\mathfrak{ab}$ die Kette vor, so kann man bei den Constructionen der Praxis annehmen, dass eben diese Linien $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bf}$ und $\mathfrak{f}m$ in einer Vertical-Ebene liegen. Bilden nun die Linien im Raume $\mathfrak{f}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ (Fig. 20) einen rechten Winkel, so ist auch der $\angle\, \mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein rechter, und da $\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha$ ist, so verschwindet das Glied $\frac{r}{R}\, sin.\ \beta\ sin.\ \varphi\ cotg.\ \alpha\ cos.\ \nu$. Da nun ferner die Ebenen E und e in diesem Falle auf einander senkrecht stehen, so ist

$$sin.\ \psi = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{p}} \text{ und } cos.\ \nu_1 = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{p}\mathfrak{f}},$$

mithin

$$sin.\ \psi_1\ cos.\ \nu_1 = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{p}\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{D},$$

und da ferner

$$sin.\ \beta = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{C}$$

ist, wenn r horizontal ist, so ist

$$-\frac{D}{C\ sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}\ .\ sin.\ \psi\ cos.\ \beta\ cos.\ \nu_1 = -\frac{D}{C}\ .\ \frac{C}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}\ .\ \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1}{D}\ .\ cos.\ \beta = -\ cos.\ \beta.$$

Liegt also die Kette $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in der Schwingungs-Ebene e, bilden ferner R und r einen rechten Winkel mit der Verticalen, und sind beide Schwingungs-Ebenen von R und r vertical, und stehen auf einander senkrecht, so ist

$$\frac{1}{E} = tg.\ \varphi_1 + tg.\ \psi_1\ .\ \frac{r\ sin.\ \beta}{R\ sin.\ \alpha} - cos.\ \beta.$$

Sind beide Linien $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}m$ horizontal, so ist

$$tg.\ \varphi_1 = 0 \text{ und } tg.\ \psi_1 = 0$$

und man erhält die höchst einfache Formel

$$\frac{1}{E} = -\ cos.\ \beta,$$

aus welcher hervorgeht, dass der Winkel β ein stumpfer sein müsse, damit das Gleichgewicht stabil sei.

§. 15.

Da bei den im §. 12 aufgeführten Wagen immer ein zusammengesetztes System von Hebeln und Ketten in Anwendung kommt, so bleibt noch zu zeigen, wie die Empfindlichkeit eines zusammengesetzten Systems, durch die Empfindlichkeit der einzelnen Systeme zu berechnen sei.

Zu dem Ende werden wir folgenden ganz allgemeinen und merkwürdigen Satz beweisen: In jedem zusammengesetzten Hebel-Ketten-Systeme ist die umgekehrte Empfindlichkeit gleich der Summe der umgekehrten Empfindlichkeiten aller einzelnen Systeme aus denen es besteht, vorausgesetzt, dass alle in Betracht gezogenen Empfindlichkeiten auf dieselbe Zunge oder denselben Zeiger bezogen werden.

Stellen die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{p}_4$ (Taf. XIII, Fig. 21) die Drehungspunkte oder Durchschnittspunkte der Drehungs-Axen der Hebel $n\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{f}_3$ und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{f}_4$ vor, ferner $\mathfrak{f}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{f}_2\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{f}_3\mathfrak{a}_3$ die Kette, durch welche diese Hebel mit einander verbunden sind, und man nennt die Empfindlichkeit zwischen den Belastungspunkten n und $\mathfrak{f}_4$, e_3 so ist also:

$$\frac{1}{e_3} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3},$$

wo E, E_1, E_2 und E_3 die Empfindlichkeiten zwischen den Belastungspunkten n und $\mathfrak{a}$, n_1 und $\mathfrak{a}_1$, n_2 und $\mathfrak{a}_2$ und n_3 und $\mathfrak{f}_4$ angeben, und n_1 mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1$ in gerader Linie liegt, ebenso wie n_2 mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_2$, n_3 mit $\mathfrak{a}_2\mathfrak{p}_3$.

Beweis. Halten sich irgend zwei Gewichte P und p an einem beweglichen Systeme das Gleichgewicht, und P beschreibt bei einer unendlich kleinen Bewegung des Systems einen Kreis mit dem Radius R, und die Ebene dieses Kreises hat gegen den Horizont die Neigung K, p, beschreibt aber gleichzeitig einen Kreis mit dem Radius r, und der Neigung k gegen den Horizont, so muss, da sich beide Gewichte das Gleichgewicht halten, die Summe ihrer virtuellen Momente gleich 0 sein. Man erhält also die Gleichung:

$$PR\,sin.\,K\,cos.\,\psi\,d\,\psi + pr\,sin.\,k.\,cos.\,\varphi\,d\,\varphi = 0.$$

Wo ψ und φ die Winkel bedeuten, die R und r mit den Durchschnittslinien ihrer Schwingungs-Ebenen mit dem Horizonte bilden. Differentiirt man diese Gleichung noch einmal nach P, ψ und φ ohne irgend ein erstes Differential constant zu setzen, so erhält man:

$$PR\,sin.\,K\,(cos.\,\psi\,d^2\psi - sin.\,\psi\,d\psi^2) + pr\,sin.\,k\,(cos.\,\varphi\,d^2\varphi - sin.\,\varphi\,d\varphi^2) + R\,sin.\,K\,cos.\,\psi\,d\psi\,dP = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$PR\,sin.\,K\,cos.\psi\,d\psi\,.\,d\varphi = -\,pr\,sin.\,k\,cos.\varphi\,d\varphi^2,$$

welche aus der ersteren hervorgeht, so erhält man:

$$-\frac{dP}{P\,d\varphi} = tang.\,\varphi - tang.\,\psi\,.\,\frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d^2\psi}{d\varphi\,d\psi} - \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}$$

oder

$$-\frac{dP}{P\,d\varphi} = tang.\,\varphi - tang.\,\psi\,.\,\frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)}{d\psi}.$$

Nehmen wir nun an, $\mathfrak{p}n$ bilde mit der Horizontalkante den Winkel φ, $\mathfrak{p}_m\mathfrak{a}_{m-1}$ mit derselben den Winkel ψ, und benennt die Empfindlichkeit zwischen den Belastungspunkten n und $\mathfrak{a}_{m-1}$ mit e_{m-1}, so erhält man:

$$\frac{1}{e_{m-1}} = tang.\,\varphi - tang.\,\psi\,.\,\frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{d^2\psi}{d\varphi\,d\psi} - \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}.$$

Nennt man den Winkel, welchen $\mathfrak{p}_m n_m$ mit der Horizontalkante bildet φ_1 und den Winkel den $\mathfrak{p}_{m+1}\mathfrak{a}_m$ mit derselben bildet ψ_1, und nennt die Empfindlichkeit zwischen den Belastungspunkten n_m und $\mathfrak{a}_m$, E_m und bezieht sie auf den beweglichen Hebel-Arm $\mathfrak{p}n$, so erhält man:

$$\frac{1}{E_m} = \left(tang.\,\varphi_1 - tang.\,\psi_1\frac{d\psi_1}{d\varphi_1} + \frac{d^2\psi_1}{d\varphi_1\,d\psi_1} - \frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_1{}^2}\right)\frac{d\varphi_1}{d\varphi}.$$

Da nun aber $\mathfrak{a}_{m-1}\mathfrak{p}_m n_m$ eine gerade Linie ist, so beträgt $\varphi_1 + \psi$ den Werth 0, und man erhält

$$d\varphi_1 = -\,d\psi,\ d^2\varphi_1 = -\,d^2\psi \text{ und } tang.\,\varphi_1 = -\,tg.\,\psi.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man:

$$\frac{1}{E_m} = tang.\,\psi\,.\,\frac{d\psi}{d\varphi} - tang.\,\psi_1\,\frac{d\psi_1}{d\varphi} + \frac{d^2\psi_1}{d\varphi\,d\psi_1} - \frac{d^2\psi}{d\varphi\,d\psi}.$$

Mithin:

$$\frac{1}{e_{m-1}} + \frac{1}{E_m} = tang.\,\varphi - tang.\,\psi_1\,\frac{d\psi_1}{d\varphi} + \frac{d^2\psi_1}{d\varphi\,d\psi_1} - \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber offenbar $= \frac{1}{e_m}$ oder drückt die umgekehrte Empfindlichkeit zwischen den Punkten n und $\mathfrak{a}_m$ aus. Man erhält mithin die Gleichung:

$$\frac{1}{e_{m-1}} + \frac{1}{E_m} = \frac{1}{e_m}$$

welche offenbar auch stattfinden muss, wenn der Belastungspunkt $\mathfrak{a}_m$ durch einen anderen vertreten wird, der unveränderlich mit der Ebene verbunden ist, die durch die Axe $\mathfrak{p}_{m+1}$ und die Linie $\mathfrak{p}_{m+1}\mathfrak{a}_m$ geht. Setzt man nun für m den Werth 1 so erhält man

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{E_1} = \frac{1}{e_1} \text{ und da } e = E \text{ ist } \frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} = \frac{1}{e_1}.$$

Setzt man statt m den Werth 2, so erhält man:

$$\frac{1}{e_2} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{e_1},$$

mithin

$$\frac{1}{e_2} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E},$$

und setzt man statt m den Werth 3, so bekommt man

$$\frac{1}{e_3} = \frac{1}{E_3} + \frac{1}{e_2},$$

und daher

$$\frac{1}{e_3} = \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E}.$$